Г. А. Байгонакова, А. Д. Медных
Горно-Алтайский государственный университет,
Новосибирский государственный университет,
galyaab@mail.ru, smedn@mail.ru

ОБЪЕМ ИДЕАЛЬНОГО ОКТАЭДРА В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим идеальный тетраэдр в гиперболическом пространстве Λ^3, все вершины которого лежат на бесконечности. Хорошо известно [1], что двугранные углы такого тетраэдра при скрещивающихся ребрах попарно равны, а сумма углов при каждой вершине равна π.

Следующая теорема была доказана Дж. Милнором [2].

Теорема 1. *Объем идеального гиперболического тетраэдра $T = T(A, B, C)$ с углами A, B, C $(A+B+C = \pi)$ вычисляется по формуле*

$$Vol(T) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma),$$

где $\Lambda(x)$ – функция Лобачевского.

Цель настоящей работы – обобщить указанный результат Милнора на случай идеального симметрического октаэдра.

Пусть O – идеальный симметричный октаэдр в Λ^3 с вершинами на бесконечности. Обозначим его двугранные углы через A, B, C, D, E и F. Учитывая, что орисфера каждой вершины обладает евклидовой геометрией, имеем следующие равенства:

$$A + B + C + D = 2\pi, \ A + C + E + F = 2\pi,$$

$$B + D + E + F = 2\pi.$$

Отсюда $C = \pi - A$, $D = \pi - B$, $F = \pi - E$. Из последних равенств, в частности, заключаем, что

$$A, B, C, D, E, F \in (0, \pi).$$

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 2. *Объем идеального симметричного октаэдра O в гиперболическом пространства равен*

$$\begin{aligned} Vol(O) &= 2\left(\Lambda\left(\frac{\pi + A + B + E}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi - A - B + E}{2}\right)\right. \\ &+ \left.\Lambda\left(\frac{\pi + A - B - E}{2}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi - A + B - E}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 11-01-90705-моб_ст).

ЛИТЕРАТУРА

1. Thurston W. P. *The geometry and topology of three-manifolds.* – Princeton Univ. Math. Dept., 1978.

2. Milnor J. *Hyperbolic geometry: the first 150 years* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – V. 6. – No 1. – P. 9–24.

Д. А. Байгушев

Лицей "Вторая школа", г. Москва,

IDanila24@gmail.com

ОБ ЭРГОДИЧЕСКИХ ПЕРЕСТАНОВКАХ АРНОЛЬДА

В 1958 г. на своем московском семинаре В.И. Арнольд поставил следующую задачу.